EDOs linéaires en dimension/ordre 2

1. On considère le système différentiel $\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & y(t)+e^{-t}, \\ y'(t) & = & 2x(t)-y(t). \end{array}\right.$ Tracer le portrait de phase du système homogène associé. Déterminer de deux manières différentes la solution maximale du système vérifiant $(x(0),y(0))=(1,0)$.

2. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Résoudre l'équation différentielle $v''(t)-v(t)=f(t)$.

3. Soit $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On considère l'équation différentielle d'ordre 2

$$x''(t)+q(t)x(t)=0. \tag{E}$$

   (a) Décrire le domaine d'une solution maximale de (E). Montrer que les zéros d'une solution non identiquement nulle sont isolés.

   (b) On note $X'(t)=A(t)X(t)$ le système différentiel d'ordre 1 associée à (E).
      i. Rappeler la définition de la résolvante R_s^t du système et ses principales propriétés.
      ii. Déterminer $\det(R_s^t)$ à l'aide de la *formule de Liouville.*
      iii. Montrer que R_0^t possède une valeur propre de module inférieur à 1.

   On suppose désormais que q est 1-périodique.

   (c) Relier R_1^{t+1} et R_0^t pour $t\in\mathbb{R}$.

   (d) Si 1 est valeur propre de R_0^1, montrer que (E) admet une solution 1-périodique non nulle.

   (e) Montrer que (E) admet une solution bornée dans le futur.

4. Résoudre

   (a) $x'(t)+x(t)=\sin(t)$
   (b) $\sqrt{1+t^2}x'-tx=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$
   (c) $x''+2x'+x=te^t$

EDOs autonomes, portraits de phase

5. *Equation logistique*

   (a) Décrire le comportement asymptotique de $N'=rN$ selon le signe de r.

   (b) On choisit désormais $K>0$. Résoudre (?) et discuter qualitativement le comportement de N vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{l} N'=rN(K-N), \\ N(0)=N_0>0. \end{array}\right.$$

   (c) On rajoute un effet Allee : décrire qualitativement le comportement de N vérifiant, pour $\rho\in[0,K[$,

$$\left\{\begin{array}{l} N'=rN(K-N)(N-\rho), \\ N(0)=N_0>0. \end{array}\right.$$

6. *Lotka Volterra (lapins et renards).* On s'intéresse au système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t)=ax(t)-bx(t)y(t), \\ y'(t)=-cy(t)+dx(t)y(t), \end{array}\right.$$

   où a,b,c,d sont des constantes strictement positives.

   (a) Qui sont les lapins, qui sont les renards ?

   (b) Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique-t-il ? Montrer qu'une solution maximale issue d'un couple de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ reste dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

   (c) Montrer que l'intégrale première $\mathcal{H}(x,y)=dx-c\log x+by-a\log y$ est constante au cours du temps.

   (d) Montrer que la solution $(x(t),y(t))$ est bornée. Que peut-on en déduire ?

   (e) Déterminer une solution (non nulle) constante au cours du temps. On l'appelle point d'équilibre.

   (f) Linéariser autour du point d'équilibre et en déduire l'allure des solutions au voisinage de ce point.

   (g) Déterminer les points critiques de $\mathcal{H}$, décrire l'allure de ses niveaux dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$, et faire le lien avec ce qui précède.